NOMBRES RÉELS

Nombres algébriques, nombres de Liouville

1\. 1) *Une propriété d'approximation diophantienne.* Soit α un nombre algébrique réel non rationnel, racine d'un polynôme irréductible à coefficients entiers P, de degré d.
a) Montrer que, pour tout nombre rationnel $x = \frac{p}{q}$ on a $|P(x)| \geq \frac{1}{q^d}$.
b) Montrer qu'il existe un réel $C > 0$, ne dépendant que de α, tel que, pour tout nombre rationnel $x = \frac{p}{q}$ on ait $|x - \alpha| \geq \frac{C}{q^d}$. (Se ramener au cas où $x \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$, et utiliser l'inégalité des accroissements finis pour $P(x) - P(\alpha)$.)
2) Soit $\varepsilon = (\varepsilon_n)$, $n \geq 1$, une suite à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Montrer que le nombre

$$x_\varepsilon = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^{n!}}$$

est transcendant. Retrouver le fait que le cardinal de l'ensemble des nombres transcendants est celui de $\mathbf{R}$.

Fractions continues

Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres entiers strictement positifs. A celle-ci, on associe la suite de fractions définie récursivement par

$$[a_0, \ldots, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, \ldots, a_n]}.$$

Il s'agit en premier lieu de bien comprendre le sens de cette écriture : on définit ici par récurrence une suite de fonctions sur $\mathbf{N}^{*n}$. La même définition donne une suite de fonctions sur $]0, +\infty[^n$ que l'on note usuellement sous la forme parlante :

$$[a_0, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{}{\ddots \, \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

Cette notation imagée ne doit pas faire croire qu'une relation comme (1)$[a_0, \ldots, a_n] = [a_0, \ldots, a_{n-1} + \frac{1}{a_n}]$ est immédiate, tant s'en faut.

1) Prouver la relation (1) en s'appuyant sur la définition, à l'exclusion de tout autre argument.

2) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, les suites définies; par la donnée de $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_1 = a_1$ et les relations de récurrence

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

satisfont à

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad [a_0, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}.$$

3) Dans cette question, on note r_n le nombre rationnel $r_n = [a_0, \ldots, a_n]$ et l'on écrit $r_n = \frac{p_n}{q_n}$, où p_n et q_n sont deux entiers positifs donnés par les relations ci-dessus. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n = (-1)^{n+1}.$$

Suite de fractions continues attachée à un nombre irrationnel θ.

4) Soit θ un nombre irrationnel > 1 et $a_0 = \lfloor \theta \rfloor$ (partie entière de θ). On définit correctement par récurrence deux suites (a_n), (θ_n) en écrivant : $\theta_0 = \theta$, $\theta = a_0 + \frac{1}{\theta_1}$, $a_1 = \lfloor \theta_1 \rfloor$ et plus généralement $\lfloor \theta_n \rfloor = a_n$ et $\theta_n = a_n + \frac{1}{\theta_{n+1}}$. La suite r_n de fractions continues attachée à (a_n) (cf 2) ci-avant) est appelée traditionnellement *suite des réduites* de θ.
a) Prouver que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\theta = [a_0, \ldots, a_n, \theta_{n+1}]$.
b) En déduire que θ est toujours compris entre r_n et r_{n+1}, préciser ce résultat suivant la parité de n.
c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|\theta - r_n| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}.$$

Application. Montrer que $\theta\mathbf{N} - \mathbf{N}$ est dense dans $\mathbf{R}$.
d) Prouver que la suite $q_n |\theta - r_n|$ décroît.

5) a) Les notations restent celle de la question 4). Montrer que, parmi trois réduites consécutives de θ, l'une au moins vérifie

$$|\theta - \frac{p}{q}| < \frac{1}{\sqrt{5} q^2}.$$

(Notant $r_{n+i} = \frac{p_{n+i}}{q_{n+i}}$ les réduites en question, $i = 0, 1, 2$, prouver en raisonnant par l'absurde que $\lambda = \frac{q_{n+1}}{q_n}$ et $\mu = \frac{q_{n+2}}{q_{n+1}}$ sont strictement inférieurs à $(1 + \sqrt{5})/2$ et aboutir à une contradiction grâce à la relation de récurrence.)
Vérifier que $\sqrt{5}$ est la meilleure constante possible.

Application ; $\exists n, 2^n = 777\ldots$
$\alpha = \log_{10}(2)$ irrationnel

$|q_n\theta - p_n| - |q_{n+1}\theta - p_{n+1}|$

$|q_n\theta - p_n| - |a_{n+1}p_n + p_{n-1}\theta - a_{n+1}q_n - q_{n-1}|$

$\leq |q_n\theta - p_n| - |a_{n+1}|\,|p_n\theta - q_n| + |p_{n-1}\theta - q$